

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_3 108 - 2 \log_3 2$ jest równa

A. 3

B. 9

C. $\log_3 104$

D. $2 \log_3 54$

Rozwiązanie:

$$\log_3 108 - 2 \log_3 2$$

Krok 1. Zastosowanie wzoru na logarytm potęgi:

$$2 \log_3 2 = \log_3 2^2 = \log_3 4$$

Zatem wyrażenie przyjmuje postać:

$$\log_3 108 - \log_3 4$$

Krok 2. Zastosowanie wzoru na logarytm ilorazu:

$$\log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 \left(\frac{108}{4} \right)$$

Otrzymujemy:

$$\log_3 27$$

Krok 3. Zamiana liczby na potęgę trójki:

$$27 = 3^3$$

Zatem:

$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

Poprawna odpowiedź: A

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej a wartość wyrażenia

$$(3 + 4a)^2 - (3 - 4a)^2$$

jest równa

A. $32a^2$

B. 0

C. $48a$

D. $8a^2$

Rozwiązanie:

$$(3 + 4a)^2 - (3 - 4a)^2$$

Krok 1. Należy skorzystać tutaj ze wzorów skróconego mnożenia:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Najpierw rozwijamy pierwszy nawias:

$$(3 + 4a)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4a + (4a)^2$$

$$= 9 + 24a + 16a^2$$

Teraz rozwijamy drugi nawias:

$$(3 - 4a)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4a + (4a)^2$$

$$= 9 - 24a + 16a^2$$

Krok 2. Podstawiamy do wyrażenia:

$$(9 + 24a + 16a^2) - (9 - 24a + 16a^2)$$

Krok 3. Usuwamy nawiasy:

$$9 + 24a + 16a^2 - 9 + 24a - 16a^2$$

Krok 4. Redukujemy wyrazy podobne:

$$(9 - 9) + (16a^2 - 16a^2) + (24a + 24a) = 48a$$

Poprawna odpowiedź: C

Liczby x_1 i x_2 są różnymi rozwiązaniami równania

$$|x - 6| = 4.$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn $x_1 \cdot x_2$ jest równy

A. 4

B. 20

C. 24

D. 100

Rozwiązanie:

Dane jest równanie

$$|x - 6| = 4.$$

Krok 1. Korzystając z definicji wartości bezwzględnej:

$$|x| = a \iff x = a \text{ lub } x = -a.$$

możemy zapisać:

$$x - 6 = 4 \text{ lub } x - 6 = -4$$

Krok 2. Rozwiązujemy oba równania:

$$x = 4 + 6 \text{ lub } x = -4 + 6$$

$$x = 10 \text{ lub } x = 2$$

Zatem:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 2$$

Krok 3. Obliczamy iloczyn:

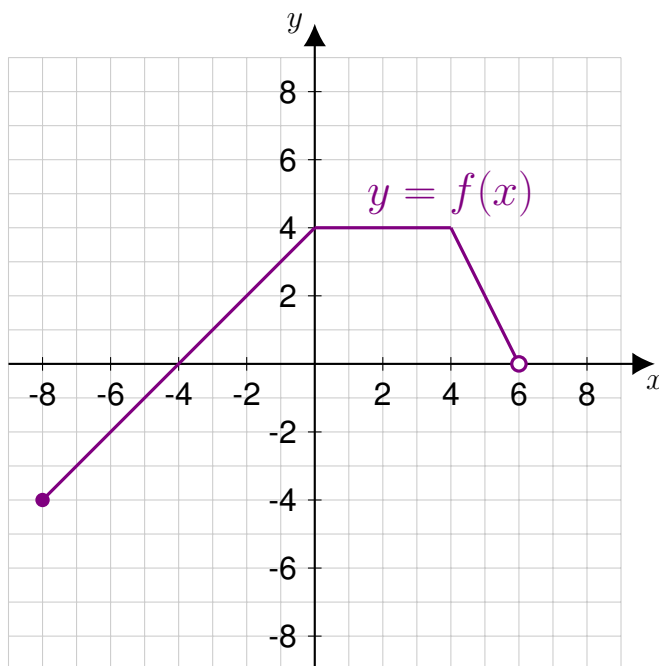
$$x_1 \cdot x_2 = 10 \cdot 2 = 20$$

Poprawna odpowiedź: B

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \in [-8, 0], \\ 4 & \text{dla } x \in (0, 4], \\ -2x + 12 & \text{dla } x \in (4, 6). \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wy kropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedzina funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, jest przedział
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ jest

Rozwiązanie:

Krok 1. Dziedzina funkcji

Dziedzina funkcji odczytujemy z osi Ox . Widzimy, że wykres zaczyna się w punkcie $x = -8$ (kropka zamalowana), a kończy w punkcie $x = 6$ (kropka niezamalowana).

Oznacza to, że funkcja przyjmuje wartości dla wszystkich argumentów od -8 do 6 , przy czym liczba 6 nie należy do dziedziny.

Stąd dziedziną funkcji jest przedział

$$[-8, 6)$$

Krok 2. Zbiór wartości

Zbiór wartości odczytujemy z osi Oy .

Najmniejszą wartość funkcja przyjmuje w punkcie $(-8, -4)$ (kropka zamalowana), więc -4 należy do zbioru wartości.

Największą wartością funkcji jest 4 . Wartość ta jest osiągnięta (na przykład dla $x = 0$), zatem 4 należy do zbioru wartości.

Funkcja przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy -4 a 4 .

Stąd zbiorem wartości funkcji jest przedział

$$[-4, 4]$$

Krok 3. Argumenty, dla których $f(x) \geq 0$

Szukamy tych argumentów, dla których wykres leży na osi Ox lub powyżej niej.

Widzimy, że funkcja przecina oś Ox w punkcie $x = -4$ i od tego miejsca wykres znajduje się nad osią aż do punktu $x = 6$, który nie należy do dziedziny.

Zatem funkcja przyjmuje wartości nieujemne dla

$$[-4, 6)$$

Krok 4. Rozwiązania równania $f(x) = 4$

Szukamy miejsc, w których wykres ma wartość 4 (wykres jest na wysokości 4).

Widzimy, że funkcja przyjmuje wartość 4 dla wszystkich x z przedziału $[0, 4]$.

Zatem zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ jest

$$[0, 4]$$

Poprawna odpowiedź:

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[-8, 6]$.
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-4, 4]$.
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, jest przedział $[-4, 6)$.
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ jest $[0, 4]$.

Miejszem zerowym funkcji liniowej f jest liczba 1. Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt $(-1, 4)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzór funkcji f ma postać

A. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

B. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

C. $f(x) = -2x + 2$

D. $f(x) = -3x + 1$

Rozwiązanie: Miejszem zerowym funkcji jest liczba 1, czyli funkcja przechodzi przez punkt

$$(1, 0)$$

Ponadto wykres przechodzi przez punkt

$$(-1, 4)$$

Krok 1. Obliczamy współczynnik kierunkowy korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Podstawiamy punkty $(1, 0)$ oraz $(-1, 4)$:

$$a = \frac{4 - 0}{-1 - 1} = \frac{4}{-2} = -2$$

Krok 2. Zapisujemy wzór funkcji:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = -2x + b$$

Krok 3. Podstawiamy do wzoru funkcji dowolny z powyższych punktów:

$$0 = -2 \cdot 1 + b$$

$$b = 2$$

Krok 4. Zapisujemy wzór funkcji:

$$f(x) = -2x + 2$$

Poprawna odpowiedź: C

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$y = f(x) = x^2 + 5x + 6, \quad \text{gdzie } x \in R.$$

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

Postać kanoniczna funkcji f wyraża się wzorem

A. $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ **B.** $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ **C.** $y = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{2}$ **D.** $y = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}$

Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem

E. $y = (x - 2)(x - 3)$ **F.** $y = (x - 2)(x + 3)$ **G.** $y = (x + 2)(x - 3)$ **H.** $y = (x + 2)(x + 3)$

Rozwiązanie:

Dana jest funkcja w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

gdzie

$$a = 1, b = 5, c = 6$$

Krok 1. Tworzymy postać kanoniczną funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

gdzie p i q są współrzędnymi wierzchołka funkcji, które mogą zostać obliczone ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = f(p)$$

Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$p = -\frac{5}{2},$$

$$\begin{aligned} q &= f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \\ &= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Zatem wierzchołek ma współrzędne

$$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Postać kanoniczna:

$$y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Poprawna odpowiedź: B

Krok 2. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

gdzie x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji, które mogą zostać obliczone ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wyznaczamy miejsca zerowe:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -2.$$

Postać iloczynowa:

$$y = (x + 2)(x + 3).$$

Poprawna odpowiedź: H

Dane jest równanie

$$\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}, \quad \text{gdzie } x \neq \frac{7}{3} \text{ i } x \neq 8.$$

Wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $(\frac{5}{4}, +\infty)$.
Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

$$\frac{3}{3x-7} = \frac{5x}{x-8}, \quad x \neq \frac{7}{3}, \quad x \neq 8$$

Krok 1. Wykonujemy mnożenie "na krzyż":

$$3(x-8) = 5x(3x-7)$$

Krok 2. Upraszczamy równanie:

$$3x - 24 = 15x^2 - 35x$$

Krok 3. Przenosimy wszystko na jedną stronę i redukujemy wyrazy podobne:

$$-15x^2 + 35x + 3x - 24 = 0$$

$$-15x^2 + 38x - 24 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$15x^2 - 38x + 24 = 0$$

Krok 4. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 24 = 1444 - 1440 = 4$$

$$x_1 = \frac{38 - \sqrt{4}}{30} = \frac{38 - 2}{30} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{38 + \sqrt{4}}{30} = \frac{38 + 2}{30} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

Krok 5. Sprawdzamy warunki:

$$x \neq \frac{7}{3}, \quad x \neq 8$$

Oba rozwiązania są prawidłowe.

Krok 6. Sprawdzamy, które z rozwiązań należą do przedziału $(\frac{5}{4}, +\infty)$:

$$\frac{4}{3} > \frac{5}{4} \quad (\text{należy do przedziału})$$

$$\frac{6}{5} < \frac{5}{4} \quad (\text{nie należy do przedziału})$$

$$\boxed{x = \frac{4}{3}}$$

Rozwiąż nierówność

$$x(2x - 1) < 2x$$

Zapisz obliczenia.**Rozwiązanie:**

Rozwiązujemy nierówność

$$x(2x - 1) < 2x$$

Krok 1. Przekształcamy nierówność tak, aby wszystkie wyrazy znalazły się po jednej stronie:

$$2x^2 - x < 2x$$

$$2x^2 - x - 2x < 0$$

$$2x^2 - 3x < 0$$

Krok 2. Szukamy pierwiastków trójmianu:

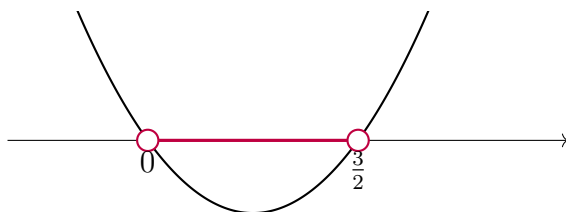
$$2x^2 - 3x$$

Wyciągając x przed nawias otrzymujemy postać iloczynową:

$$x(2x - 3)$$

więc pierwiastkami są:

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Krok 3. Szkicujemy wykres paraboliWspółczynnik kierunkowy $a = 2$, zatem parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry.**Krok 4.** Odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.Szukamy wartości mniejszych od zera, więc interesuje nas część wykresu leżąca poniżej osi Ox . Rozwiązaniem tej nierówności jest przedział:

$$x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Zadanie 9. (0–2)**CIĄGI**

Dany jest trzywyrazowy ciąg $(16, 8, 1 - 2m)$.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

Ciąg $(16, 8, 1 - 2m)$ jest arytmetyczny dla m równego

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\frac{3}{2}$

Ciąg $(16, 8, 1 - 2m)$ jest geometryczny dla m równego

E. $\frac{2}{3}$

F. 2

G. $\frac{3}{2}$

H. 4

Rozwiązanie:

Dany jest ciąg:

$$(16, 8, 1 - 2m)$$

Krok 1. Ciąg arytmetyczny

Korzystamy z własności:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Podstawiamy wyrazy ciągu:

$$8 = \frac{16 + 1 - 2m}{2}$$

$$8 = \frac{17 - 2m}{2} \quad | \cdot 2$$

$$16 = 17 - 2m$$

$$-1 = -2m$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Poprawna odpowiedź: B.

Krok 2. Ciąg geometryczny

Korzystamy z własności:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Podstawiamy wyrazy ciągu:

$$8^2 = 16 \cdot (1 - 2m)$$

$$64 = 16 - 32m$$

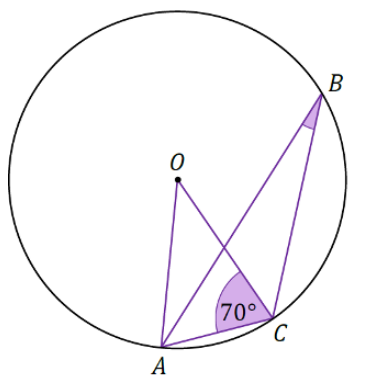
$$48 = -32m$$

$$m = -\frac{48}{32}$$

$$m = -\frac{3}{2}$$

Poprawna odpowiedź: G

Punkty A , B , C leżą na okręgu o środku w punkcie O . Kąt ACO ma miarę 70° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Miara kąta ostrego ABC jest równa

A. 10°

B. 20°

C. 35°

D. 40°

Rozwiązanie:

Punkty A , B , C leżą na okręgu o środku w punkcie O .

Dany jest kąt:

$$\angle ACO = 70^\circ$$

Krok 1.

Odcinki OA i OC są promieniami okręgu, więc:

$$OA = OC$$

Trójkąt AOC jest trójkątem równoramiennym.

Zatem:

$$\angle ACO = \angle CAO = 70^\circ$$

Krok 2.

Obliczamy kąt środkowy:

$$\angle AOC = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

Krok 3.

Kąt wpisany oparty na tym samym łuku jest połową kąta środkowego:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ$$

$$\angle ABC = 20^\circ$$

Poprawna odpowiedź: B

Zadanie 11. (0-2)**RÓWNANIE OKRĘGU**

Na płaszczyźnie w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg $\mathcal{O}$ o środku $S = (3, -1)$ i promieniu $r = 5$.

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie tego okręgu ma postać

A. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$

B. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$

C. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

D. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

2. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Obrazem okręgu $\mathcal{O}$ w symetrii względem osi Ox jest okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$.	P	F
Okrąg $\mathcal{O}$ ma z osią Oy układu współrzędnych dokładnie dwa punkty wspólne.	P	F

Rozwiązanie:

Dany jest okrąg o środku:

$$S = (3, -1)$$

i promieniu:

$$r = 5$$

Krok 1. Równanie okręgu

Korzystamy ze wzoru:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Podstawiamy:

$$a = 3, \quad b = -1, \quad r = 5$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

Poprawna odpowiedź: C**Krok 2. Ocena prawdziwości stwierdzeń**

Stwierdzenie 1 Symetria względem osi Ox zmienia znak współrzędnej y środka, więc nowy środek ma współrzędne:

$$S = (3, -1) \rightarrow S' = (3, 1)$$

Nowe równanie:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Równanie podane w stwierdzeniu:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

jest inne, więc

F

Stwierdzenie 2

Sprawdzamy punkty wspólne z osią Oy :

Na osi Oy mamy $x = 0$.

$$(0 - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

$$9 + (y + 1)^2 = 25$$

$$(y + 1)^2 = 16$$

$$\sqrt{(y + 1)^2} = \sqrt{16}$$

$$|(y + 1)| = 4$$

$$y + 1 = 4 \quad \text{lub} \quad y + 1 = -4$$

$$y = 3 \quad \text{lub} \quad y = -5$$

Są dwa punkty wspólne, więc

P

Objętość walca o promieniu podstawy 2 jest równa $16\pi^2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość tego walca jest równa

A. 2

B. 4

C. 2π

D. 4π

Rozwiązanie:

Objętość walca wyraża się wzorem

$$V = \pi r^2 h.$$

Krok 1. Podstawiamy dane:

Promień podstawy:

$$r = 2$$

Objętość:

$$V = 16\pi^2$$

Podstawiamy do wzoru:

$$16\pi^2 = \pi \cdot 2^2 \cdot h$$

Krok 2. Upraszczamy:

$$16\pi^2 = \pi \cdot 4 \cdot h$$

$$16\pi^2 = 4\pi h$$

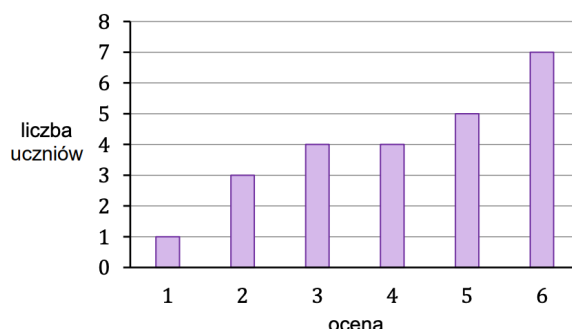
Krok 3. Dzielimy obie strony przez 4π :

$$h = \frac{16\pi^2}{4\pi}$$

$$h = 4\pi$$

Poprawna odpowiedź: D

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej liczącej 24 uczniów. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wy kropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Mediana ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa
2. Dominanta ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa

Rozwiązanie:

Krok 1. Obliczenie mediany

Ponieważ liczba uczniów wynosi 24 (liczba parzysta), mediana jest średnią z 12-tej i 13-tej wartości w uporządkowanym zbiorze danych.

Z diagramu możemy wywnioskować, że dwunasta ocena to 4, a trzynasta ocena to 5.

Zatem mediana wynosi:

$$\frac{4 + 5}{2} = 4,5.$$

Mediana = 4,5

Krok 2. Wyznaczenie dominanty

Dominanta to ocena, która występuje najczęściej.

Najwięcej uczniów (7 osób) otrzymało ocenę 6.

Dominanta = 6
